

На правах рукописи

Добролюбова Дарья Владимировна

Математическое моделирование
трехмерных гармонических электромагнитных полей в объектах с анизотропными
характеристиками

Специальность 1.6.9 – Геофизика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2026

Работа выполнена в ИНГТ им. А. А. Трофимука СО РАН

Научный руководитель:

д.т.н., профессор Шурина Элла Петровна, профессор
кафедры Вычислительных технологий Новосибирского
государственного технического университета

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования.

Электромагнитные методы широко применяются в разведочной и промышленной геофизике, в частности, для решения задач разведки и разработки углеводородных месторождений. Интерпретация данных электромагнитного зондирования на основе петрофизических соотношений (закон Арчи и его модификации) используется для оценки коллекторских свойств пород и прогноза флюидонасыщения. Для геофизических объектов характерна иерархия пространственных масштабов: месторождение (км; магнитотеллурическое зондирование, зондирование становлением поля), околоскважинное пространство (м-дм; индукционный и диэлектрический каротаж), микроструктура образцов керна – поровое пространство, трещиноватость, минеральные включения (мм–мкм; лабораторные измерения электропроводности). На каждом более грубом масштабе гетерогенная среда описывается осреднённой характеристикой – эффективным тензором электропроводности. Для сред естественного происхождения, таких как горные породы, эта характеристика, в общем случае, анизотропна вследствие преимущественной ориентации пор, трещин, слоистости, вытянутых минеральных включений (прожилки пирита, графитизированные зоны, рудные тела).

Моделирование гармонического электромагнитного поля в средах, содержащих тонкие объекты с высокой электропроводностью, **является актуальной задачей при изучении образцов керна трещиноватых карбонатных пород.** Такие объекты – трещины, заполненные высокоминерализованными рассолами, рудные прожилки, графитизированные зоны – характеризуются малой толщиной при контрасте электропроводности с окружающей средой, достигающем нескольких порядков. Это порождает особенности поведения поля на границах раздела подобластей (индуцированные вихревые токи, скин-эффект). Прямое разрешение таких объектов конечноэлементной сеткой требует шага, согласованного с толщиной объекта и скин-слоя, что приводит к неприемлемому росту вычислительных затрат. Альтернативой является класс приближенных моделей, в которых тонкий объект заменяется срединной поверхностью с заданными на ней условиями сопряжения импедансного типа (impedance transmission conditions, ITC), связывающими скачок и среднее значение следов поля по обе стороны. Такие модели обеспечивают существенное снижение вычислительных затрат за счёт исключения объёма объекта из дискретизации при сохранении трёхмерной постановки задачи

Апскейлинг эффективных характеристик выполняется методами численной гомогенизации, среди которых можно выделить многомасштабный метод конечных элементов (МКЭ), гетерогенный многомасштабный МКЭ и др. В зависимости от подхода микроструктура учитывается либо при построении

неполиномиальных базисных функций макроэлемента, либо через эффективные характеристики, вычисляемые по решениям локальных задач. Гибкость макроразбиения при этом обеспечивается методами на полиэдральных сетках, в частности виртуальным МКЭ. Конечноэлементное разбиение для многомасштабных методов должно отражать иерархию моделей на сеточном уровне, обеспечивая хорошую аппроксимацию криволинейных межфрагментарных границ на микромасштабе и гибкость разбиения – на макромасштабе.

В настоящее время для описания внутренней структуры гетерогенных сред широко применяются неразрушающие методы исследования, такие как компьютерная микротомография (μ КТ) и магнитно-резонансная томография (МРТ). Информация об объекте представляется в виде набора послойных цифровых изображений. Изображения имеют высокое разрешение, при этом их число может достигать нескольких тысяч. Большинство существующих программных средств цифрового моделирования ядра строят сеточные модели непосредственно из вокселей, что приводит к ступенчатой аппроксимации границ фаз, искажению связности тонких поровых каналов и трещин. **Построение по данным μ КТ неструктурированных тетраэдральных и иерархических разбиений, обеспечивающих гладкую аппроксимацию межфрагментарных границ, представляет собой актуальную задачу.**

Объект исследования – математические модели трехмерного гармонического электромагнитного поля в гетерогенных геологических объектах с анизотропными эффективными характеристиками: (i) образцах ядра трещиноватых карбонатных пород с сильнопроводящими включениями, (ii) образцах ядра терригенных пород со сложной внутренней структурой, представленной в виде данных компьютерной микротомографии.

Предмет исследования — вычислительные схемы на базе метода Галеркина и его модификаций для моделирования трехмерных электрических полей в областях с тонкими сильнопроводящими объектами и гетерогенных образцах ядра с множеством внутренних границ.

Цель исследования - **повышение точности** и физической обоснованности моделей электромагнитных свойств горных пород за счёт разработки и программной реализации вычислительных схем векторного метода конечных элементов на основе условий сопряжения импедансного типа для моделирования трёхмерных гармонических электрических полей в средах с тонкими сильнопроводящими объектами, а также сеточных технологий построения моделей ядра по данным микротомографии, обеспечивающих определение анизотропных эффективных тензоров электропроводности.

Научные задачи:

1. Разработка, программная реализация и верификация вычислительной схемы векторного метода конечных элементов на основе трёхмерного обобщения условий сопряжения импедансного типа для моделирования гармонического электрического поля в средах с тонкими сильнопроводящими

объектами.

2. Определение области применимости предложенной схемы в диапазоне частот методов индукционного каротажа и ВИКИЗ и электрофизических параметров, характерных для трещиноватых коллекторов с минерализованным флюидом и рудными включениями,.

3. Разработка и программная реализация алгоритмов построения по данным микротомографии неструктурированных тетраэдральных и иерархических сеточных моделей образцов керна терригенных пород, обеспечивающих согласованную с границами раздела фаз аппроксимацию внутренней структуры.

4. Определение анизотропных эффективных тензоров электропроводности построенных моделей, верификация на конфигурациях с известным решением и валидация на эталонном образце песчаника Berea.

Настоящая работа **соответствует п. 12 и 14 паспорта специальности 1.6.9 «Геофизика»:**

12. ... Моделирование блочно-иерархических, самоподобных, пористых, флюидонасыщенных сред. Математическое моделирование эффективных физических свойств горных пород. Развитие методов теории эффективных сред для определения эффективных физических свойств горных пород. ... теоретические исследования процедур осреднения геофизических полей и физических характеристик таких сред.

14.. ... Разработка алгоритмов решения прямых и обратных задач геофизики,. ... Создание соответствующих компьютерных технологий, в том числе для суперкомпьютеров и графических процессоров, и их применение в геолого-геофизической практике при достаточной математической новизне.

Научная новизна.

1. Построена вычислительная схема векторного метода конечных элементов на рёберных элементах для трёхмерной гармонической задачи относительно напряжённости электрического поля, адаптированная для учёта тонких сильнопроводящих объектов через условия сопряжения импедансного типа.

2. Определены границы применимости предложенной вычислительной схемы в диапазоне геометрических и электрофизических параметров сред, характерных для практических задач электромагнитного каротажа.

3. Разработан алгоритм построения неструктурированных тетраэдральных и иерархических сеточных моделей керна по данным микротомографии с геометрически согласованной аппроксимацией криволинейных межфазных границ, устраняющий ступенчатые артефакты воксельных моделей.

Теоретическая и практическая значимость. Предложенная вычислительная схема векторного метода конечных элементов на основе условий сопряжения импедансного типа обеспечивает существенное снижение вычислительных затрат по сравнению с полноразмерной геометрической постановкой задачи и позволяет моделировать в естественных переменных

трёхмерное гармоническое электрическое поле в средах с тонкими сильнопроводящими объектами в диапазоне частот 1 кГц – 10 МГц, характерном для методов индукционного каротажа и ВИКИЗ.

Разработанный алгоритм построения неструктурированных тетраэдральных и иерархических сеточных моделей по данным микротомографии применён для численного моделирования эффективных электрических свойств образцов керна. Построенные геометрически согласованные модели обеспечивают корректную аппроксимацию гладких криволинейных межфазных границ и служат единой платформой для многофизического моделирования в объектах со сложной геометрией порового пространства.

Предложенные вычислительная схема и алгоритмы реализованы в виде программных комплексов (свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2017663556, № 2024613237). Результаты работы внедрены в практику исследований АО «СНИИГГиМС» (акт о внедрении от 18.06.2024).

Методология и методы исследования.

Моделирование трёхмерных гармонических электрических полей выполняется векторным методом конечных элементов в функциональном пространстве $H(\text{rot}, \Omega)$ на рёберных элементах Неделека. Для сред с тонкими сильнопроводящими объектами применяются условия сопряжения импедансного типа. Для больших разреженных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) реализуется двухуровневый решатель на ядре роторного оператора, адаптированный для постановки с условиями сопряжения. Верификация вычислительной схемы выполняется сопоставлением с эталонными решениями при полном сеточном разрешении тонких объектов; область применимости определяется систематическим варьированием геометрических и электрофизических параметров.

Алгоритм восстановления внутренних границ в расчетной области по данным μ КТ сканирования основан на методе шагающих тетраэдров. Построение тетраэдральных дискретизаций расчетных областей выполняется программным комплексом SALOME™. Построение полиэдральных разбиений основано на разбиении Вороного.

Эффективные электрические характеристики определяются методом численной гомогенизации на основе решения прямой задачи и закона Ома. Валидация выполняется сопоставлением с экспериментальными данными для эталонного песчаника Berea Sandstone и с петрофизическими зависимостями типа закона Арчи. В качестве эталонных геометрических моделей для расчета эффективных свойств использованы трехмерные цифровые керны, реконструированные по данным микротомографии из открытых международных коллекций: базы данных Imperial College London (ICL) и платформы Digital Rocks Portal, что обеспечивает верифицируемость и воспроизводимость полученных результатов.

Результаты, выносимые на защиту:

1. Вычислительная схема векторного метода конечных элементов на основе условий сопряжения импедансного типа, обеспечивающая эффективное моделирование трехмерного гармонического электрического поля в образцах горных пород с тонкими сильнопроводящими включениями в частотных диапазонах индукционного каротажа и ВИКИЗ; установленные границы её применимости по геометрическим и электрофизическим параметрам вмещающей среды и неоднородностей.

2. Алгоритм построения иерархических сеточных моделей образцов керна терригенных флюидонасыщенных горных пород по данным микротомографии с согласованной аппроксимацией криволинейных межфазных границ, обеспечивающий возможность корректного определения эффективных электрофизических характеристик методом численной гомогенизации.

Степень достоверности. Достоверность полученных результатов подтверждена внутренним тестированием, а также независимыми процедурами верификации программных комплексов и валидации на экспериментальных данных.

Апробация результатов. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах: VII Всероссийская конференция с международным участием ITES-2025, 2025г.; объединенный семинар ИВМиМГ СО РАН и кафедры вычислительной математики ММФ НГУ, 2024 г.; семинар по геоэлектрике, ИНГГ СО РАН, 2023 г.; семинар "Информационно-вычислительные технологии", ФИЦ ИВТ СО РАН, 2023 г; High-Performance Computing Systems and Technologies in Scientific Research, Automation of Control and Production, (г. Барнаул, 2022 г.); XX Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (г. Новосибирск, 2019 г.); XX Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (г. Кемерово, 2018 г.); XVII Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (г. Новосибирск, 2016 г.); Краевые задачи и математическое моделирование (г. Новокузнецк, 2016 г.); Многоядерные процессоры, параллельное программирование, ПЛИС, системы обработки сигналов (г. Барнаул, 2017 г.); Марчуковские научные чтения - 2017 (г. Новосибирск, 2017 г.); Математика в современном мире: Международная конференция, посвящ. 60-летию Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (г. Новосибирск, 2017 г.); Наука и инновации XXI века (г. Сургут, 30 ноября 2017 г.)

Публикации. Материалы работы опубликованы в 15 печатных работах, из них 5 статей в научных журналах из списка ВАК (Вычислительные технологии, Системы анализа и обработки данных, Физика Земли, Геология и геофизика), 3 статьи в научных изданиях, индексируемых базами Scopus и/или Web of Science (Физика Земли, Communications in Computer and Information Science, Геология и геофизика), 7 статей в сборниках трудов конференций и тезисов докладов. Получено 2 свидетельства о регистрации программы для ЭВМ.

Личный вклад автора. Диссертант принимал непосредственное участие в постановке задач и обсуждении теоретических моделей на всех этапах исследования. Автором лично осуществлены модификация и программная реализация на языке C++ вычислительной схемы векторного метода конечных элементов с условиями сопряжения импедансного типа, а также проведено исследование области её применимости в частотном диапазоне индукционного каротажа и ВИКИЗ для сред с тонкими объектами. Алгоритм построения иерархических полиэдральных сеточных моделей по данным микротомографии разработан и программно реализован автором самостоятельно. Содержание работы и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы.

Благодарности. Автор с глубоким уважением и благодарностью отдаёт дань своему Учителю – научному руководителю профессору Элле Петровне Шуриной за неоценимую помощь и вдохновляющее наставничество на всём пути исследования.

Автор глубоко признателен академику М.И. Эпову за внимание к работе, содержательные дискуссии и критические замечания, которые во многом определили вектор данного исследования, а также подходы к анализу и организации материала.

Автор выражает искреннюю благодарность коллективу лаборатории многомасштабного моделирования ИНГГ СО РАН за сотрудничество и поддержку – Е. И. Штанько, А. Ю. Кутищевой, С. И. Маркову, Н. В. Штабель, Д. А. Архипову.

Структура и объем работы. Научная квалификационная работа состоит из введения, обзора литературы, 4 глав, заключения, библиографии и 5 приложений. Общий объем работы 113 страниц, из них 99 страниц текста, включая 35 рисунков и 18 таблиц. Библиография включает 125 наименований.

Содержание работы

Во Введении сформулированы цели и задачи исследования, его объект и предмет, обоснована актуальность выбранной темы и научная новизна, описана методология и методы исследования, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В главе 1 введены два фундаментальных класса гетерогенных геологических сред – карбонатные и терригенные породы, различающиеся генезисом и характером внутренней структуры. Особенности их внутренней структуры и представления данных обуславливают требования к вычислительным схемам для решения прямых задач моделирования электромагнитных полей и расчета эффективной электрической проводимости в таких средах.

В зависимости от физики определяющих процессов, а также от

геометрических и физико-механических свойств среды эффективные характеристики могут быть как скалярными величинами, так и тензорными, причем эффективные характеристики могут описываться плотным тензором, даже если на микромасштабах свойства среды скалярны. Такие среды в дальнейшем описываются как макроанизотропные. В главе приводится обзор различных типов анизотропии, а также методов гомогенизации гетерогенных и макроскопически анизотропных сред. Отмечается высокая эффективность численных методов гомогенизации, основанных на решении прямой задачи вычисления распределения электромагнитного поля в сложнопостроенной среде.

Изучение эффективных характеристик образцов керна терригенных горных пород, характеризующихся большим числом межфрагментарных границ, требует точного цифрового описания их сложной внутренней геометрии. Для описания их внутренней структуры применяются методы неразрушающих измерений. Приведенный в главе обзор показал, что существующие коммерческие и свободно распространяемые программные продукты обеспечивают построение сеточных моделей по данным компьютерной микротомографии преимущественно на основе воксельных разбиений, огрубляющих криволинейные межфазные границы. Это приводит к существенной погрешности аппроксимации площади поверхности границ раздела, что влияет на точность определения эффективных электрофизических характеристик методом численной гомогенизации. Таким образом, построение конечноэлементных разбиений образцов геологических объектов на основе оцифрованных данных об их структуре является актуальной задачей.

Выбор алгоритмов построения обуславливается особенностями исследуемых объектов, областью приложения, а также выбором метода численного моделирования. Трехмерная сеточная модель, построенная на основе данных неразрушающих методов визуализации, описывающих внутреннюю структуру сложнопостроенной среды, должна: максимально подробно и точно описывать внутреннюю структуру исследуемого объекта; иметь размер сеточного разбиения, не приводящий к чрезмерным вычислительным затратам на решение прямой задачи моделирования; отражать требования к качеству сеточного разбиения, определяемые типом моделируемого физического процесса (связность порового пространства при моделировании гидродинамических процессов, качество аппроксимации площади поверхности границ раздела для задач электромагнетизма и т.д.); удовлетворять требованиям, определяемым численным методом решения прямой задачи.

Для некоторых образцов карбонатных сред, например, содержащих систему тонких сильнопроводящих включений (трещины с минерализацией, глинистые прослойки) доступна априорная информация о внутренней структуре. Несмотря на относительно простую геометрию отдельных включений, исследование таких сред сопряжено с трудностями, обусловленными их геометрической разномасштабностью и высоким контрастом физических характеристик. Для

снижения вычислительной сложности в этом классе задач применяются классические условия Леонтовича (импедансные граничные условия, ИВС), которые формулируются как граничные условия на поверхности, заменяющей проводящий объект, и моделируют поглощение электромагнитного поля. Для моделирования тонких проводящих объектов конечной толщины применяются импедансные передающие условия (impedance transmission conditions, ИТС), представляющие собой условия сопряжения, получаемые асимптотическими разложениями решения по толщине проводящего объекта. Такие условия предполагают замену тонкого проводящего объекта эквивалентной поверхностью, что позволяет избежать построения сеточного разбиения внутри объекта и существенно снижает вычислительную сложность. Вычислительные схемы с ИТС сформулированы и хорошо исследованы для электротехнических приложений (экранирование, трансформаторы, индукционный нагрев) в диапазонах частот, толщин и проводимостей, характерных для этих задач. Применительно к задачам геофизики (электромагнитное зондирование сред с тонкими проводящими слоями) систематического исследования области применимости ИТС в литературе не обнаружено. Это обосновывает актуальность разработки вычислительной схемы с ИТС и исследования её области применимости для частотного диапазона и параметров сред, характерных для геофизических приложений. Существующие редуцированные постановки преимущественно формулируются в терминах скалярных или векторных потенциалов и исследуются в диапазоне частот, толщины и проводимости тонких объектов, характерных для электротехнических приложений. В работе вводится модифицированная вариационная постановка векторного метода конечных элементов (МКЭ) для нескольких вариантов передающих условий для трехмерного векторного уравнения Гельмгольца относительно электрического поля в частотном диапазоне, характерном для геофизических приложений. Анализ подходов к моделированию электромагнитных полей в средах с тонкими сильнопроводящими объектами показывает, что редуцированные модели имеют ограниченную область применимости, которая определяется лежащими в их основе предположениями. Это обосновывает необходимость исследования области применимости предложенной в работе модифицированной вариационной формулировки.

В **Главе 2** приводится математическая модель электрического поля в частотной области и редуцированная модель для сред, содержащих тонкие сильнопроводящие объекты. Для дискретизации редуцированной модели введена модифицированная вариационная постановка метода конечных элементов, позволяющая учитывать тонкие сильнопроводящие объекты как токонесущие поверхности, не вводя для них объемную дискретизацию.

Поведение напряженности гармонического электрического поля в расчетной области Ω , состоящей из вмещающей среды Ω_1 и включений Ω_2 , описывается уравнением Гельмгольца:

$$\nabla \times \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = \mathbf{J}^s \quad (1)$$

где E – напряженность электрического поля [В/м], $\mu = \mu_0 \hat{\mu}$ – магнитная проницаемость, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ [Гн/м] – магнитная проницаемость вакуума, $\hat{\mu}$ – относительная магнитная проницаемость, $k^2 = (i\omega\sigma - \omega^2\varepsilon)$, $\omega = 2\pi f$ – циклическая частота, рад/с, f – частота [Гц], $\varepsilon = \hat{\varepsilon}\varepsilon_0$ – диэлектрическая проницаемость, $\varepsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$ – диэлектрическая проницаемость вакуума [Ф/м], $\hat{\varepsilon}$ – относительная диэлектрическая проницаемость, J^s – плотность электрического тока [А/м²]. В работе в качестве источника с плотностью тока J^s рассматривается соленоидальный контур.

На внешней границе расчетной области $\partial\Omega = \Gamma_E \cup \Gamma_M$ заданы краевые условия вида:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{E}_g \quad (2)$$

– электрические краевые условия, заданные на Γ_E ;

$$\mu^{-1} \mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (3)$$

– магнитные краевые условия, заданные на Γ_M .

$\mathbf{n}$ – единичная внешняя нормаль к Γ_E или Γ_M соответственно.

На границе раздела Γ_{12} имеют место условия непрерывности для тангенциальной компоненты напряженности электрического поля:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \mathbf{0}, \quad (4)$$

Тангенциальная компонента напряженности магнитного поля, в общем случае, не является непрерывной на Γ :

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{j}_s, \quad (5)$$

Где $\mathbf{j}_s$ – плотность поверхностного тока на границе раздела сред

Для решения задачи (1) применяется векторный метод конечных элементов (ВМКЭ) в функциональном пространстве $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$, обеспечивающем непрерывность тангенциальной компоненты напряженности электрического поля на межэлементных границах и границах раздела "вмещающая среда-включение":

$$\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) = \{ \mathbf{u} \in L^2(\Omega) : \nabla \times \mathbf{u} \in L^2(\Omega) \}, \quad (6)$$

где $L^2(\Omega)$ – пространство интегрируемых с квадратом функций.

Для сред, содержащих тонкие сильнопроводящие включения, вводится редукция модели, основанная на физически обоснованном предположении, что тангенциальная компонента напряженности магнитного поля на границе раздела сильнопроводящей и слабопроводящей среды претерпевает скачок, пропорциональный значению касательной компоненты электрического поля на срединной поверхности S с некоторым коэффициентом пропорциональности Z :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}^+ - \mathbf{n} \times \mathbf{H}^- \Big|_S = Z (\mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\text{int}}) \quad (5)$$

Здесь Z – поверхностный импеданс, зависящий от частоты ω , толщины h , проводимости σ_i , магнитной проницаемости μ_0 и типа передающих условий. В работе проанализированы и применены четыре типа условий, сохраняющих

непрерывность тангенциальной компоненты напряженности электрического поля на эквивалентной поверхности S : ИТС-1-0, ИТС-1-1, ИТС-2-0 и модифицированные условия Mayergoyz-Bedrosian (МВ). Явный вид коэффициента Z для каждого типа условий приведён в таблице 1. Здесь

$\gamma = (1+i)/\delta_i$, $\delta_i = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma_i}}$ – скин-слой в материале включения, σ_i – проводимость тонкого включения.

Таблица 1. Вид поверхностного импеданса в зависимости от типа передающих условий

Тип условий	ИТС10	ИТС11	ИТС20	МВ
Z	$i\omega\sigma_i h$	$i\omega\sigma_i h \left(1 - \frac{i\omega\mu\sigma_i h^2}{6}\right)$	$\frac{2\gamma}{\mu} \frac{\sinh\left(\frac{h}{2}\gamma\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2}\gamma\right) - \frac{h}{2}\gamma \sinh\left(\frac{h}{2}\gamma\right)}$	$\frac{2\gamma}{\mu} \operatorname{th}\left(\frac{h}{2}\gamma\right)$

На основе этих условий построена и исследована вариационная постановка векторного метода конечных элементов, адаптированная для эффективного учета тонких сильнопроводящих включений в трёхмерных геологических объектах:

Для $\mathbf{J}^s \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ найти $\mathbf{E} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}, \Omega)$ такое, что $\forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}, \Omega)$ выполняется:

$$\int_{\Omega} (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{w}) d\Omega + k^2 \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{w} d\Omega + Z \int_S (\mathbf{n}_s \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{n}_s \times \mathbf{w}) dS = -i\omega \int_{\Omega} \mathbf{J}^s \cdot \mathbf{w} d\Omega \quad (7)$$

где S – осредненная токнесущая поверхность, которой аппроксимируется исходное сильнопроводящее включение (рисунок 1.а), $\mathbf{n}_s$ – единичная нормаль к поверхности. Редуцированная постановка также может быть сформулирована для среды, содержащей несколько тонких сильнопроводящих включений.

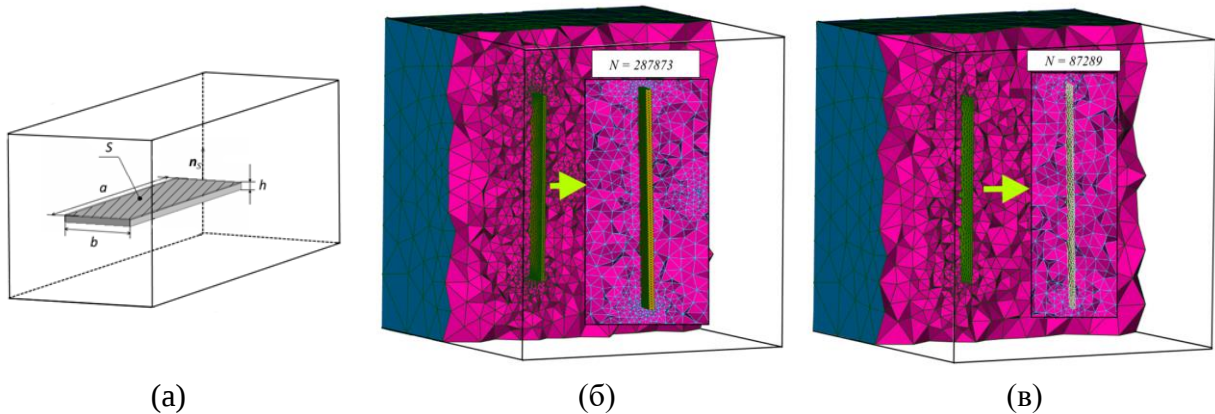


Рисунок 1. (а). тонкий сильнопроводящий объект во вмещающей среде; (б). объемная дискретизация тонкого объекта; (в). редуцированная модель, дискретизация эквивалентной токнесущей поверхности

Дискретный аналог вариационной постановки (7) строится на нерегулярном адаптивном тетраэдральном конечноэлементном разбиении расчетной области Ω в дискретном подпространстве $\mathbf{H}_0^h(\text{rot}, \Omega) \subset \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega)$:

Для $\mathbf{J}^s \in L^2(\Omega)$ найти $\mathbf{E}^h \in \mathbf{H}_0^h(\text{rot}, \Omega) + \mathbf{E}_\tau^h$ такое, что $\forall \mathbf{w}^h \in \mathbf{H}_0^h(\text{rot}, \Omega)$ выполняется:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}^h \cdot \nabla \times \mathbf{w}^h d\Omega + \int_{\Omega} k^2 \mathbf{E}^h \cdot \mathbf{w}^h d\Omega + Z \int_S (\mathbf{n}_S \times \mathbf{E}^h) \cdot (\mathbf{n}_S \times \mathbf{w}^h) dS = \\ = -i\omega \int_{\Omega} \mathbf{J}^s \cdot \mathbf{w}^h d\Omega. \end{aligned} \quad (8)$$

В редуцированной модели среды с тонкими сильнопроводящими объектами эти объекты заменяются эквивалентными поверхностями с условиями сопряжения и, таким образом, не дискретизируются по толщине (рисунок 1.в). На поверхности вводится разбиение двумерными элементами (треугольниками), конформное трехмерному разбиению вмещающей подобласти. Это позволяет значительно сократить размер дискретной модели. Введенный в вариационную постановку дополнительный интеграл по усредненной поверхности включения на уровне дискретной вариационной постановки учитывается как добавочный член в глобальной матрице результирующей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

В качестве дискретного аналога пространства функций в работе выбрано конечномерное подпространство, натянутое на полный базис иерархических векторных функций Вебба, включающий роторные (соленоидальные) функции, обеспечивающие непрерывность тангенциальной компоненты векторного поля на межэлементных границах, и градиентные функции, отвечающие за корректную аппроксимацию скачка нормальной компоненты. Соленоидальные функции базиса Вебба являются дивергентно-свободными, поэтому их использование для представления напряженности электрического поля на ребрах разбиения, аппроксимирующего источник, обеспечивает его соленоидальность.

Матрица СЛАУ, возникающая при моделировании среды с тонкими сильно проводящими включениями, имеет неблагоприятные спектральные свойства, что проявляется в медленной сходимости итерационных методов на основе подпространств Крылова (BiCGStab, GMRES) при увеличении частоты возбуждения и контраста проводимости. Это обуславливает необходимость применения итерационного метода, устойчивого к таким особенностям.

Для решения комплекснозначной СЛАУ, полученной в результате дискретизации постановки (8), используется двухуровневый алгебраический метод, реализующий V-цикл, основанный на идее алгебраического разложения пространства $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$ в прямую сумму ядра оператора ротора и ортогонального дополнения в энергетической норме, что позволяет эффективно устранять соответствующие компоненты ошибки. Поскольку тангенциальные следы базисных функций на токонесущей поверхности S представляют собой двумерные базисные функции в пространстве $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$, для них автоматически выполняется двумерный аналог вложения дискретных подпространств, что

позволяет использовать V-цикл, не модифицируя операторы сужения и продолжения. Добавочный поверхностный интеграл на "грубом" подпространстве учитывается при ассемблировании матрицы СЛАУ. Использование двухуровневого алгебраического решателя позволяет существенно снизить вычислительные затраты по сравнению с решением методами на подпространствах Крылова (BiCGStab, GMRES) с масштабированием.

Анализ области применимости предложенной вариационной постановки с использованием различных типов передающих интерфейсных условий выполняется в диапазоне частот и контраста электропроводности, характерных для каротажа и исследований образцов керна. Численные эксперименты проводились на немагнитных средах, рассматривались включения и вмещающая среда, контрастные только по электропроводности. Относительная погрешность решения, полученного в модифицированной вариационной постановке, оценивается по профилю, проходящему на расстоянии $(2-3)h$, где h – толщина тонкого объекта, в норме пространства $L^2(\Omega)$. Применимость передающих условий оценивалась путём сравнения редуцированного решения с эталонным (объёмное разрешение включения по толщине) в диапазоне частот 1 кГц – 10 МГц и проводимостей включения 0,1–1000 См/м при $\sigma_{\text{host}} = 10^{-4}$ См/м. Погрешность характеризовалась двумя величинами: относительной погрешностью воспроизведения эталонного решения и погрешностью, нормированной на аномальное поле (разность между полем с включением и полем без включения): $e_a = \|E_v - E_{\text{ITC}}\|_{L^2} / \|E_v - E_h\|_{L^2}$, где E_v – эталонное решение с подробным разрешением толщины включения, E_h – решение для однородной среды без включения, E_{ITC} – решение с передающими условиями. Такая нормировка позволяет контролировать относительную точность воспроизведения аномалии, создаваемой тонким проводящим включением.

При $\sigma_i \geq 1$ См/м (контраст к вмещающей среде $\geq 10^4$) погрешность аппроксимации поля не превышает 15 % в диапазоне частот, где толщина слоя значительно меньше глубины проникновения в самом слое ($h/\delta_i \ll 1$); погрешность относительно аномалии не превышает 27 % и достигает максимума на низких частотах, где аномалия минимальна. При $\sigma_i = 0.1$ См/м (контраст 10^3) погрешность аппроксимации поля возрастает до 50 %, что указывает на выход за пределы применимости редуцированной модели. Таким образом, разработанная схема обеспечивает приемлемую точность для геофизически значимого класса высокопроводящих объектов (графитизированные зоны, рудные тела, насыщенные рассолами среды) с эффективной проводимостью от единиц См/м и непригодна для моделирования слабоконтрастных неоднородностей.

Условия более высокого порядка обеспечивают лучшую аппроксимацию при увеличении отношения h/δ_i (переход к режиму выраженного скин-эффекта в тонком объекте), однако приводят к ухудшению обусловленности

системы линейных алгебраических уравнений. Для практически значимого диапазона параметров, достигаемого при частотах до единиц МГц и проводимостях единицы–сотни См/м) условия первого порядка обеспечивают достаточную точность при приемлемых вычислительных затратах.

В таблице 2 представлены **вычислительные затраты** при использовании классической вариационной формулировки векторного метода конечных элементов и при и при использовании модифицированной вариационной постановки с передающими условиями различных порядков. Моделирование выполнялось на неструктурированном тетраэдральном разбиении, базисные функции – функции Вебба первого порядка второго типа. Выход по норме невязки $\alpha = 10^{-9}$. Вычисления выполнялись на ПК с процессором Intel® Core™ i5-4590 CPU 330GHz.

Таблица 2. Вычислительные затраты

Толщины пластины, мм частота, кГц	Классическая постановка				Модифицированная постановка					
	N	DOFs	α	t, c	N	DOFs	t, c			
							ITC-1-0	ITC-1-1	ITC-2-0	MB
1, 50	357 825	842 988	10^{-9}	1 580.03	190 940	448 518	995.79	864.21	1477.82	1 048.12
2.5, 100	578 896	1 357 958	10^{-9}	2 392.84	216 633	538 312	1 267.76	1 021.36	2 885.61	1 348.34
5, 50	582 368	551 012	10^{-9}	1 329.59	190 940	448 518	720.37	575.34	1 387.48	792.03

Таким образом, разработана и реализована вычислительная схема на основе векторного МКЭ с передающими граничными условиями для редукции тонких сильнопроводящих объектов в задачах моделирования гармонического электромагнитного поля. Установлены границы применимости метода (контраст более трех порядков, $h/\delta_i \ll 1$) показано, что для условий первого порядка сокращение вычислительных затрат составляет 1.5-2 раза при погрешности аппроксимации поля не более 15 % для геофизически значимого класса задач.

В Главе 3 представлен разработанный алгоритм построения конечноэлементной дискретизации гетерогенных объектов, информация о внутренней структуре которых представлена в виде данных компьютерной микротомографии (μКТ).

В работе вводится специальная иерархическая сеточная структура, ориентированная на применение в многомасштабном моделировании для решения многофизических задач и определения эффективных характеристик естественных и искусственных сред. Разбиение на макроуровне выполняется на основе анализа информации о распределении включений, без подробного учета внутренней структуры образца. Элементы макроуровневого разбиения в дальнейшем будем называть макроэлементами. В общем случае макроэлементы представляют собой полиэдры. Для рассматриваемых в данной работе образцов песчаников характерно незначительное изменение концентрации включений в

отдельных подобластях образца. Таким образом, представляется целесообразным строить регулярное макроэлементное разбиение типа Вороного. В данной работе оно строится с использованием иерархически модифицированного алгоритма построения разбиений Вороного на основе принципа дуальности разбиениям Делоне. На микроуровне внутри каждого макроэлемента вводится неструктурированное тетраэдральное разбиение, учитывающее границы раздела подобластей. Процедура восстановления внутренней структуры расчетной области основана на модифицированном алгоритме шагающих симплексов.

Алгоритм построения иерархического конечноэлементного разбиения на основе набора сегментированных КТ изображений (сканов) имеет следующий вид.

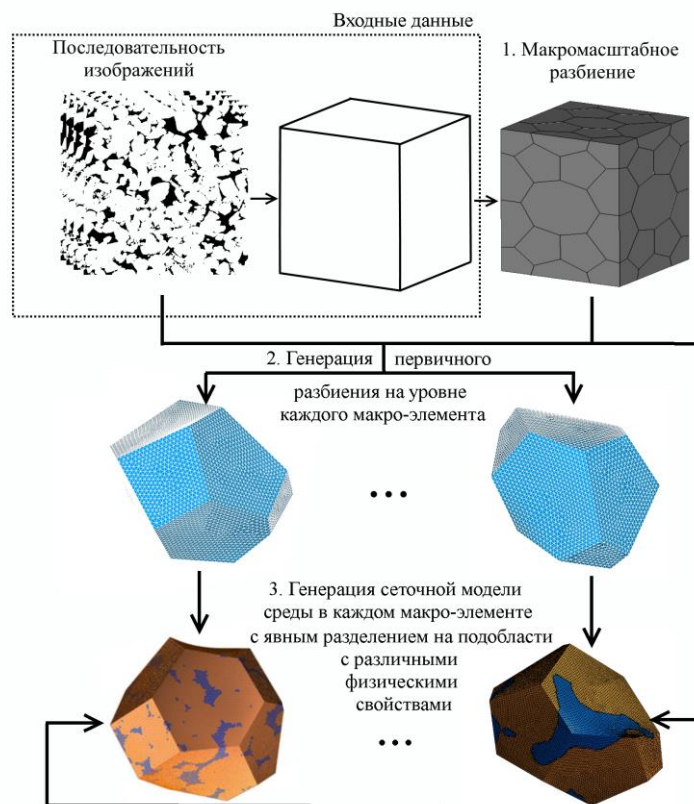


Рисунок 2. Алгоритм построения иерархической сеточной модели гетерогенных объектов по КТ-изображениям

Процедуру генерации сеточной модели, учитывающей внутреннюю структуру, внутри макроэлемента, можно разделить на следующие этапы:

1. Выделение внутренних межфрагментарных границ S_i ;
2. Определение характеристик выделенных подобластей Ω_k , ограниченных замкнутыми контурами S_i , на основе сегментации;
3. Построение адаптивного симплицеального разбиения на каждом макроэлементе $\Pi_j \in \mathcal{P}_h$ на основе информации о границах раздела сред и характеристиках выделенных подобластей.

Построение внутренних границ подобластей в пределах макроэлемента

выполняется с помощью модифицированного иерархического алгоритма шагающих симплексов. Алгоритм шагающих тетраэдров позволяет построить топологически корректные изоповерхности, не содержащие «дыр». Однако, поскольку для геологических сред характерно большое количество и сложная геометрия внутренних границ, сгенерированные алгоритмом шагающих тетраэдров геометрические модели имеют высокую сложность и требуют значительных вычислительных ресурсов для обработки и последующей дискретизации. Представленный в данной работе гибридный алгоритм пропускает этап явной генерации геометрической модели, вместо этого осуществляется перестроение первичного разбиения с учетом выделенных межфрагментарных границ, устраняющее неконформность, порожденную в результате появления висячих узлов в точках пересечения изоповерхности с ребрами тетраэдров.

Результатом алгоритма, схематично представленного на рисунке 2, является макроуровневое полиэдральное разбиение расчетной области и набор тетраэдральных разбиений каждого из макроэлементов.

Оценка качества результирующей сеточной модели гетерогенного объекта, построенной по данным КТ, складывается из следующих показателей:

1. Оценка топологической корректности порового пространства;
2. Оценка общей пористости зерна (включает изолированные поры);
3. Оценка площади поверхности межфрагментарных границ (сравнение модели и сканов);
4. Оценка эффективной пористости зерна (в смысле течения флюида);
5. Сравнение рассчитанных эффективных характеристик модели и эффективных характеристик, измеренных в ходе проведенного лабораторного физического эксперимента.

Верификация алгоритмов выполнялась на синтетических образцах с известной внешней и внутренней геометрией. Рассмотрен синтетический кубический образец с ребром 3 см, содержащий 100 сферических включений радиуса 1.2 мм. Качество сеточной модели, построенной предложенным в работе алгоритмом, оценивалось в соответствии с геометрическими критериями 1, 4. Для описания внутренней структуры синтетического образца был сгенерирован стек незашумленных сегментированных послойных изображений.

Площадь поверхности включений $S^* = 0.00181 \text{ м}^2$, их объемная концентрация $V^* = 2.6807\%$.

В таблице 2 приведены расчетные величины площади поверхности включений и их объемной концентрации для сгущающихся сеточных разбиений, построенных для следующих вариантов:

1. сеточные разбиения синтетического образца при заданной геометрии включений;
2. сеточные разбиения, полученные гибридным алгоритмом, где точки расщепления определяются в результате нескольких итераций поиска бисекцией ;

3. сеточные разбиения, полученные средствами открытой библиотеки CGAL по сгенерированным послойным изображениям образца.

С ростом размерности сеточного разбиения гибридный метод демонстрирует сходимость поверхностной концентрации включений к эталонной. Несмотря на систематическое занижение объёмной доли, гибридный алгоритм обеспечивает погрешность её аппроксимации на уровне 11–12.3%, что соответствует точности специализированной библиотеки CGAL (14.18%) на сопоставимых сетках, а по точности восстановления площади поверхности включений (погрешность <5%) – превосходит её.

Таблица 1. Аппроксимация площади поверхности границы сред и объёмной концентрации включений на сеточных разбиениях различной подробности

	Число элементов разбиения	Площадь поверхност и $S, м^2$	$\frac{ S - S^* }{S^*} * 100\%$	Объем включений $V, \%$	$\frac{ V - V^* }{V^*} * 100\%$
Эталонные значения (аналитика)		1.81E-03		2.68	
Сеточное разбиение по исходной геометрии	52 842	1.54E-03	14.92	1.96	26.87
	1 353 766	1.78E-03	1.66	2.59	3.360
	3 078 578	1.79E-03	1.10	2.62	2.240
Сеточное разбиение Гибридным алгоритмом: бисекция	537 365	2.042E-03	12.82	2.60	2.990
	1 087 000	2.146E-03	18.56	2.69	0.370
	1 649 098	1.747E-03	3.48	2.35	12.31
	2 492 766	1.760E-03	2.76	2.38	11.19
	3 736 357	1.774E-03	1.99	2.40	10.45
CGAL	1 869 680	1.700E-03	6.08	2.30	14.18

Верификация предложенного алгоритма на синтетической модели также была проведена путем сравнения удельной эффективной электропроводности (УЭП) на постоянном и переменном токе, полученных на «эталонной» сеточной модели и на сеточной модели среды, построенной по синтетическим данным. Даже на достаточно грубых сеточных разбиениях, построенных гибридным алгоритмом, погрешность расчета эффективной УЭП не превышает 5%, а с ростом подробности сеточного разбиения снижается до менее, чем 1%.

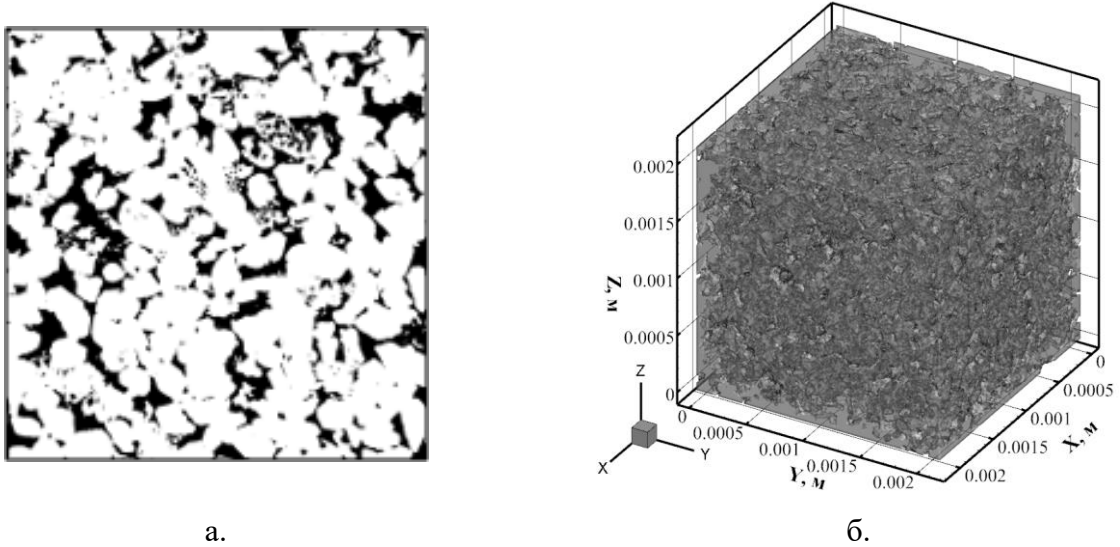


Рисунок 3. (а). Berea Sandstone, скан с разрешением 5.345 мкм; (б). сеточная модель образца Berea Sandstone (поровое пространство)

Валидация разработанного алгоритма построения сеточных моделей сложнопостроенных сред по данным КТ проводилась на серии образцов песчаника Berea Sandstone (наборы КТ изображений из открытых источников). Песчаник Berea представляет собой эталонный образец керна, широко применяемый для валидации численных методов благодаря его высокой однородности и хорошо изученным петрофизическим характеристикам. Критериями корректности построенной сеточной модели принимались сохранение объемной доли порового пространства и корректность вычисления пластового коэффициента (FF, от formation factor).

Были рассмотрены два набора данных, различающихся как объемом и разрешением, так и степенью предобработки:

1. 400 сегментированных 8-битных КТ-изображений разрешением 400x400 пикселей ($6.4 \cdot 10^7$ вокселей в наборе), шаг сканирования 5.345 мкм, заявленная пористость 19.6%;
2. 1800 16-битных изображений формата TIFF разрешением 2024×1980 пикселей ($\sim 6 \cdot 10^9$ вокселей), шаг сканирования ~ 2 мкм, экспериментальная пористость 20.90%.

Для сегментированного набора изображений отсутствует неоднозначность разделения фаз на скелет и поры, и точность описания порового пространства целиком определяется параметрами первичной сетки и предложенного алгоритма. Погрешность определения пористости составила 6.8%. Полученные на построенной предложенным алгоритмом сеточной модели значения пластового коэффициента хорошо согласуются с данными, приведенными в литературе: погрешность вычисления пластового коэффициента на основе построенной сеточной модели образца песчаника находится в пределах 5% относительно значений, рассчитанных по воксельной модели.

Сеточная модель второго рассмотренного образца существенно зависит от порогового значения, выбранного для разделения образца на матрицу и поровое пространство. В данном случае, несмотря на то, что распределение цветовой интенсивности по всему набору изображений имеет две моды, был выбран единый порог для сегментации. Рассчитанная по построенной модели пористость (21.38%) отклоняется от экспериментальной (20.90%) на 2.3%.

Таблица 2. Сравнение УЭП, вычисленной по построенной сеточной модели, с экспериментальными данными

Удельная проводимость флюида, См/м	Измеренная σ_{eff}	Вычисленная σ_{eff}	Относительная погрешность, %
11.76	1.041	1.095	5.19
6.37	0.675	0.581	13.93

Наблюдаемые погрешности (5-14%) находятся в пределах неопределенности, вносимой процедурой сегментации исходных КТ-данных, и подтверждают практическую применимость алгоритма для построения расчетных моделей реальных кернов.

Анализ масштабируемости предложенного алгоритма показал, что даже при расчетах на достаточно детализированной модели реального образца и использовании базовой версии реализации, алгоритм демонстрирует устойчивую положительную масштабируемость.

Таким образом, разработан алгоритм построения сеточных моделей керна по данным компьютерной томографии. Алгоритм верифицирован на синтетических задачах с известным аналитическим решением и апробирован на томографических данных эталонных образцов песчаника. Показано, что построенные сеточные модели воспроизводят объёмные (пористость) и транспортные (пластовый коэффициент, эффективную УЭП) характеристики образцов с погрешностью 5-14%, согласующейся с точностью исходных экспериментальных данных.

В главе 4 приводится описание реализованных на языке C++ программных модулей: VFEMthin, реализующего модифицированную постановку для решения уравнения Гельмгольца в средах с тонкими сильно проводящими включениями, и HуbАМТ, предназначенного для построения иерархической сеточной модели объекта, заданного в виде набора КТ-изображений.

Оба комплекса используют общую структуру данных для представления сеточных разбиений, что обеспечивает совместимость между компонентами и позволяет выполнять полный цикл моделирования – от реконструкции среды по КТ-данным до решения электрофизических задач – без необходимости дополнительной пост-обработки или конвертации сеточной модели.

Разработанные программные комплексы верифицированы, демонстрируют численную сходимость и обеспечивают воспроизводимость численных экспериментов, описанных в главах 3 и 4, и позволяют получать

физически корректные результаты.

Заключение Для трёхмерного моделирования гармонических электромагнитных полей в геологических средах, содержащих тонкие сильнопроводящие объекты — трещины, прослои пирита или руд, характерные для карбонатных коллекторов, — разработана модифицированная вариационная постановка векторного метода конечных элементов на основе передающих интерфейсных условий (ИТС). Этот подход заменяет объёмную дискретизацию тонких объектов их срединными поверхностями с граничными условиями, аппроксимирующими распределение поля в слое, что позволяет исключить необходимость сверхмелкого разрешения по толщине. Реализована соответствующая вычислительная схема и выполнен анализ области её применимости. Установлено, что при контрасте проводимости, превышающем три порядка, и отношении толщины слоя к глубине проникновения $h/\delta \ll 1$ условия первого порядка обеспечивают погрешность аппроксимации поля не более 15 % и сокращают время расчёта в 1.5–2 раза по сравнению с полным объёмным разрешением. Показано, что условия второго порядка приводят к ухудшению обусловленности результирующей системы линейных алгебраических уравнений и, как следствие, к росту числа итераций итерационного решателя, что нивелирует выигрыш от понижения размерности задачи; их применение оправдано в режиме, когда толщина объекта сопоставима с глубиной скин-слоя.

Для численного исследования эффективных свойств терригенных коллекторов, структура которых задана набором послойных цифровых изображений (в частности, данных компьютерной микротомографии), разработан и реализован алгоритм построения иерархических конечноэлементных разбиений, аппроксимирующих геометрию фаз. Алгоритм формирует двухуровневые полиэдральные и неструктурированные тетраэдральные сетки с локальным сгущением в областях границ раздела фаз и допускает естественную параллелизацию. Построенные сеточные модели применены для численного определения эффективных тензоров удельного электрического сопротивления образцов горных пород в постановке на постоянном токе. Установлено, что полученные модели воспроизводят экспериментально измеренные характеристики эталонных образцов песчаника в пределах погрешности исходных данных.

Предложенные методы реализованы в программных комплексах VFEMthin, предназначенном для решения уравнения Гельмгольца в средах с тонкими проводящими включениями, и HуbАМТ, обеспечивающем построение сеточных моделей гетерогенных объектов по данным компьютерной томографии. Для обоих разработанных программных комплексов получены свидетельства о регистрации программ для ЭВМ. Результаты, полученные с использованием программного комплекса HуbАМТ, были внедрены в рамках прикладного исследования, связанного с анализом образцов керна горных пород, что подтверждено актом внедрения.

Основные публикации по теме диссертации

Список публикаций автора по теме диссертации в журналах, входящих в перечень ВАК

1. Эпов М.И., Марков С.И., Штанько Е.И., Добролюбова Д.В. Численный анализ микроанизотропии удельной электропроводности образцов осадочных пород при фильтрации буровых растворов на глинистой основе // Геология и геофизика – 2025. – т. 66 – № 10 – С. 1359-1369
2. Добролюбова Д.В. Исследование переноса свойств типа "керна - керн" на примере песчаника Berea Sandstone // Системы анализа и обработки данных – 2025. – № 1 – С. 121-140
3. Добролюбова Д.В., Шурина Э.П., Применение модифицированной вариационной постановки векторного метода конечных элементов для моделирования гармонического электрического поля в областях с криволинейными экранами // Вычислительные технологии. – 2021. – 26. – № 3. – С.26-41
4. Шурина Э.П., Добролюбова Д.В., Штанько Е.И. Редуцированная вариационная постановка для моделирования гармонического электромагнитного поля в областях с малыми проводящими включениями // Вычислительные технологии. – 2018. – 23. – № 3. – С.92-108
5. Эпов М.И., Шурина Э.П., Добролюбова Д.В., Кутищева А.Ю., Марков С.И., Штабель Н.В., Штанько Е.И. Определение эффективной электропроводности флюидонасыщенного керна по данным компьютерной томографии // Физика Земли – № 5 – С. 13-23 – 2023

Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ

1. Шурина Э.П. Свидетельство о государственной регистрации программы Программный комплекс для решения задачи Гельмгольца в средах с тонкими проводящими пластинами / Э.П. Шурина, Д.В. Добролюбова, Е.И. Штанько // св-во о регистр. прог. № 2017663556; RU; заявка №2017660191, поступила 10.10.2017; зарегистрирована 07.12.2017.
2. Добролюбова Д.В. Свидетельство о государственной регистрации программы СТНybAMT / Э.П. Шурина, Д.В. Добролюбова // св-во о регистр. прог. № 2024613237; RU; зарегистрирована от 09.02.2024.